Profesor
Edson Curahua

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 01: TRIÁNGULOS

PRESENTACIÓN

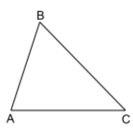
DEFINICIÓN Y ELEMENTOS
TEOREMAS FUNDAMENTALES Y PROPIEDADES
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS
LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS
PUNTOS NOTABLES
PROPIEDADES CON LAS LÍNEAS NOTABLES

TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

TEORÍA

Definición.- Se llama triángulo a la figura geométrica que se obtiene al unir tres puntos no colineales mediante segmentos de recta.



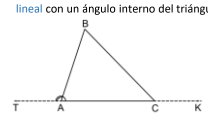
Sean A, B y C tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llama triángulo ABC, y se indica con ΔABC. Los puntos A, B y C se llaman vértices, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman lados.

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} / B \notin \overleftrightarrow{AC}$$

Todo triángulo ABC determina tres ángulos: ∠BAC, ∠ABC y ∠ACB, a éstos los llamamos los ángulos del triángulo ABC (o ángulos internos). Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente, podemos designarlos por ∠A, ∠ B y ∠ C.

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

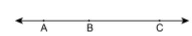
Un ángulo externo de un triángulo es el ángulo adyacente y suplementario de un ángulo del triángulo, es decir es cada uno de los ángulos que determina un par lineal con un ángulo interno del triángulo.



En la figura se muestra el ángulo externo en el vértice A, resultado de prolongar el lado $\overline{CA}$ hasta el punto T. El ángulo BAT es el adyacente suplementario del ángulo BAC.

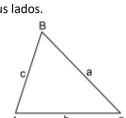
Importante:
El punto T se encuentra en la prolongación de $\overline{CA}$, mientras que el punto K se encuentra en la prolongación de $\overline{AC}$. Se debe tener en cuenta el sentido, no es lo mismo prolongar $\overline{CA}$ que prolongar $\overline{AC}$.

Nota: La siguiente expresión $A - B - C$, significa:
a) Los puntos A, B y C son colineales, y
b) B está entre A y C.



DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Perímetro: 2p
Se llama perímetro de un triángulo a la suma de las medidas de sus lados.

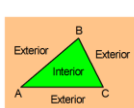


$$2p = AB + BC + AC$$

$$2p = a + b + c$$

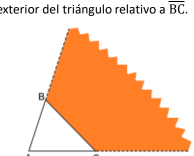
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Un punto está en el interior de un triángulo, si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Se llama región triangular a la unión del triángulo con todos sus puntos interiores.
El exterior de un triángulo es el conjunto de todos los puntos que no están ni en el triángulo ni en su interior.

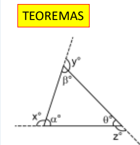


TEOREMAS FUNDAMENTALES

Observación:
La región sombreada corresponde al exterior del triángulo relativo a $\overline{BC}$.



TEOREMAS

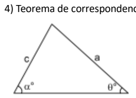


1) $\alpha + \beta + \theta = 180$

2) $\beta + \theta = x$

3) $x + y + z = 360$

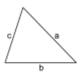
4) Teorema de correspondencia



$\alpha > \theta \leftrightarrow a > c$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

5) Desigualdad triangular



$a < b + c$

$b < c + a$

$c < a + b$

$|a - c| < b < a + c$

(Teorema de existencia)

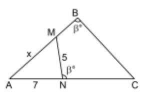
Nota:
Éste último teorema permite obtener otras desigualdades que se usan con frecuencia en la resolución de problemas.
Por ejemplo, una consecuencia importante nos dice: En todo triángulo, cualquiera de sus lados siempre es menor que el semiperímetro.

Ejemplo 01

En el lado $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se ubica el punto M y en el lado $\overline{AC}$ el punto N, de modo que MN=5, AN=7 y m∠MNC=m∠B. ¿Cuántos valores enteros puede tomar AM?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:
El primer paso es graficar y colocar los datos en la figura, luego debemos estar atentos a los teoremas que se pueden utilizar y definir exactamente ¿qué es lo que pide el problema?



Se pide: ¿cuántos valores enteros puede tomar AM=x?

En el triángulo AMN:

$7 - 5 < x < 7 + 5$

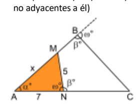
$2 < x < 12 \quad \ldots(1)$

PROPIEDADES

Ahora viene lo más difícil: ¿qué hacemos con esos ángulos de igual medida (β)?
Pues observe que en el triángulo ABC el ángulo exterior en B, mide igual que el ángulo MAN (cada uno ω), por ser cada uno el suplemento de β.
Ahora, en el triángulo ABC, se tiene por ángulo exterior:

$$\omega > \alpha$$

(recuerde que en todo triángulo un ángulo exterior siempre es mayor que cualquiera de los ángulos internos no adyacentes a él)



Por último en el triángulo AMN, por teorema de correspondencia se tiene:

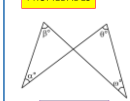
$\omega > \alpha \leftrightarrow x > 5 \quad \ldots(2)$

De (1) y (2) , se tiene: $5 < x < 12$

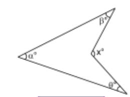
Por lo tanto x puede tomar 6 valores enteros.

Rpta. (B)

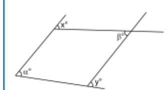
PROPIEDADES



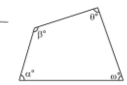
$\alpha + \beta = \theta + \omega$



$x = \alpha + \beta + \theta$

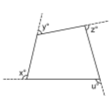


$\alpha + \beta = x + y$

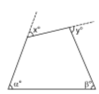


$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360$

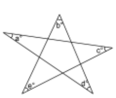
PROPIEDADES



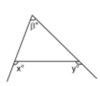
$x + y + z + u = 360$



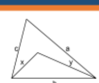
$\alpha + \beta = x + y$



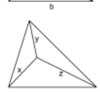
$a + b + c + d + e = 180$



$x + y = 180 + \beta$

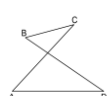


$b < x + y < c + a$



Sea 2p el perímetro del triángulo, entonces:

$p < x + y + z < 2p$



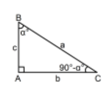
$BC + AD < AC + BD$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

1) Según las medidas de sus ángulos

a) Triángulo rectángulo

Es aquel que tiene un ángulo recto, los lados que lo forman se llaman catetos y el que se le opone recibe el nombre de hipotenusa.



$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$: Catetos

$\overline{BC}$: Hipotenusa

$a^2 = b^2 + c^2$

Teorema de Pitágoras

b) Triángulo oblicuángulo

Es aquel que no tiene ángulo recto.
Puede ser:

1) Triángulo acutángulo

Es el que tiene sus 3 ángulos agudos.

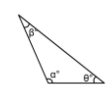
$0 < \alpha < 90$

$0 < \beta < 90$

$0 < \theta < 90$

2) Triángulo obtusángulo

Es el que tiene uno de sus ángulos obtuso. Los dos ángulos restantes serán agudos.



$90 < \alpha < 180$

$0 < \beta < 90$

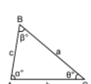
$0 < \theta < 90$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

2) Según las medidas de sus lados

a) Triángulo escaleno

Es aquel que tiene sus lados diferentes. Sus ángulos también tienen medidas diferentes.



$a \neq b$

$b \neq c$

$c \neq a$

b) Triángulo isósceles

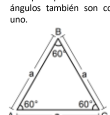
Es aquel que tiene dos lados congruentes, además los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes. Al lado desigual se le denomina base y al ángulo desigual ángulo en el vértice.

$AB = BC$

$0 < \alpha < 90$

c) Triángulo equilátero

Es aquel que tiene sus tres lados congruentes; sus ángulos también son congruentes y miden 60 cada uno.



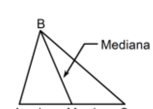
$AB = BC = AC$

LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

1) Mediana

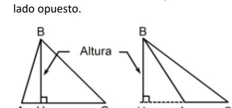
Segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Si M es punto medio de $\overline{AC}$, entonces: $\overline{BM}$ es la mediana trazada desde B a $\overline{AC}$ o mediana relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC.



2) Altura

Segmento trazado perpendicularmente desde un vértice a la recta que contiene al lado opuesto.



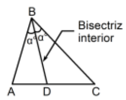
Si $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, entonces $\overline{BH}$ es la altura trazada desde B o altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ o altura relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC.

LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

3) Bisectriz

a) Bisectriz interior

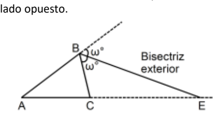
Segmento de una bisectriz interior de un ángulo de un triángulo, cuyos extremos son el vértice de dicho ángulo y el punto de corte con el lado opuesto.



$\overline{BD}$ es una bisectriz interior del triángulo ABC.

b) Bisectriz exterior

Bisectriz exterior es el segmento de bisectriz de un ángulo externo de un triángulo, cuyos extremos son el vértice del ángulo y su punto de intersección con la recta que contiene al lado opuesto.



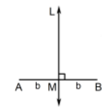
$\overline{BE}$ es una bisectriz exterior del triángulo ABC.

LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

Observaciones

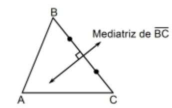
1) Mediatriz de un segmento

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento en su punto medio.



$\overleftrightarrow{L}$: Mediatriz de $\overline{AB}$

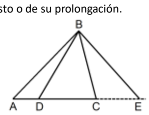
En el triángulo ABC podemos trazar la mediatriz de uno de sus lados, como muestra la figura:



LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

2) Ceviana

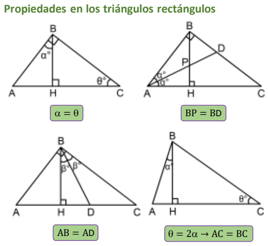
Se denomina ceviana al segmento de recta cuyos extremos son un vértice del triángulo y un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



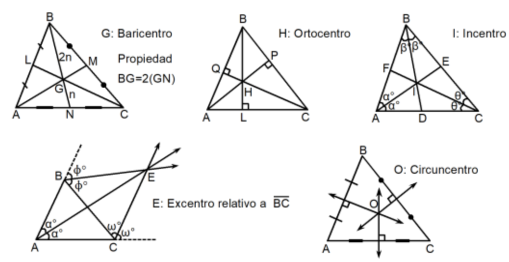
$\overline{BD}$: Ceviana interior

$\overline{BE}$: Ceviana exterior

Propiedades en los triángulos rectángulos



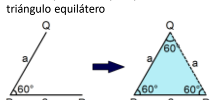
PUNTOS NOTABLES



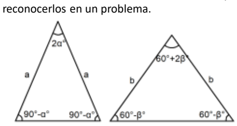
LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

Observaciones

Si PQ=PR y m∠QPR=60, se recomienda unir los puntos Q y R para formar un triángulo equilátero

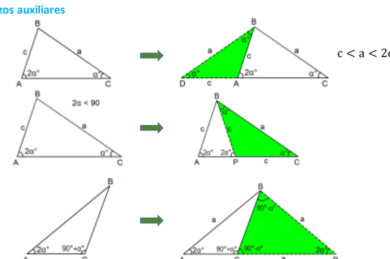


Éstas son algunas de las formas que presentan las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles, conviene recordarlas para reconocerlos en un problema.



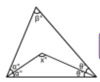
LÍNEAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

Trazos auxiliares

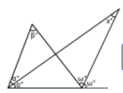


PUNTOS NOTABLES

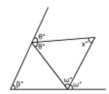
Propiedades con las líneas notables



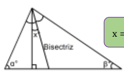
$x = 90 + \frac{\beta}{2}$



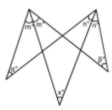
$x = \frac{\beta}{2}$



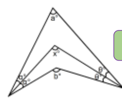
$x = 90 - \frac{\beta}{2}$



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$



$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$



$x = \frac{a + b}{2}$

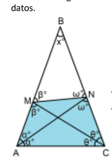
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

01. En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ (N en $\overline{BC}$; M en $\overline{AB}$); tal que m∠BMN=m∠CMA y m∠MNB=m∠ANC. Calcular m∠ABC.

A) 60 B) 75 C) 90
D) 80 E) 36

Resolución:

Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.



Se pide m∠ABC=x

En el cuadrilátero AMNC:

$2\alpha + 2\theta = \beta + \omega$ ...(1)

Por ángulo exterior:

ΔANB: $\omega = \alpha + x$ ...(2)

ΔBMC: $\beta = x + \theta$ ...(3)

De (1), (2) y (3):

$\alpha + \theta = 2x$

Finalmente en el triángulo ABC:

$2\alpha + 2\theta + x = 180$

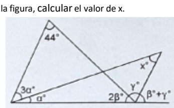
$2(2x)$

$\therefore x = 36$

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. En la figura, calcular el valor de x.



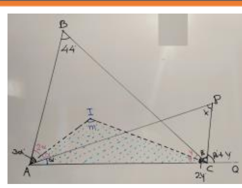
A) 22 B) 44 C) 20
D) 56 E) 11

Resolución:

En el gráfico trazamos las bisectrices de los ángulos A y C del triángulo ABC, las que se intersecan en el punto I.

Ahora podemos utilizar las propiedades.

ΔABC: $m = 90 + \frac{44}{2} \rightarrow m = 112$



Finalmente en el triángulo AIC, P es excentro y por propiedad, tenemos:

$x = \frac{m}{2} = \frac{112}{2}$

$\therefore x = 56$

Rpta. D

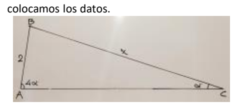
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. En el triángulo ABC: m∠A=4(m∠C). Calcular el mayor valor entero de BC, si AB=2

A) 8 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución:

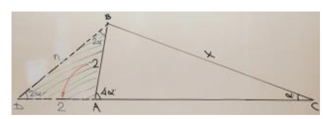
Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.



Se pide el mayor valor entero de BC=x

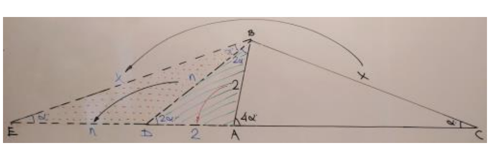
Trazamos la ceviana exterior $\overline{BD}$, tal que m∠ABD=2α, luego resulta:

$AB = AD = 2$ (ΔDAB: isósceles)



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ahora trazamos $\overline{BE}$ (E en la prolongación de $\overline{AD}$), de modo que m∠DBE=α



Ahora resulta:

DB=DE=n (ΔEDB: isósceles) y

BC=BE=x (ΔEBC: isósceles)

Por teorema de existencia:

ΔADB: $n < 2 + 2 \rightarrow n < 4 \rightarrow 2n < 8$ ... (1)

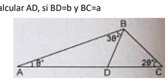
ΔEDB: $x < n + n \rightarrow x < 2n$ ... (2)

De (1) y (2): $x < 8$ $\therefore x_{máx} = 7$

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

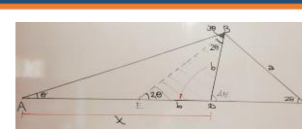
04. Calcular AD, si BD=b y BC=a

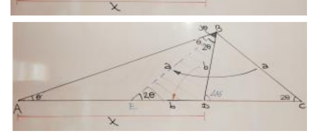


A) 2(a-b) B) 3(a-b) C) a+b
D) 2a-b E) 4a-b

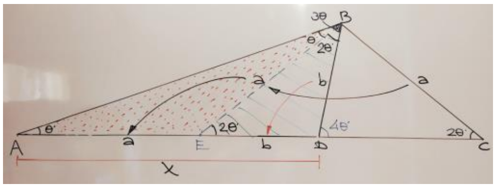
Resolución:

Se pide: AD=x





RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



$\therefore x = a + b$

Rpta. C

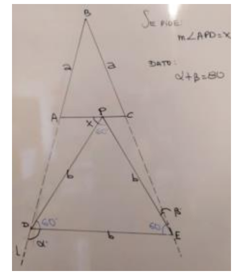
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

05. Sea el triángulo isósceles ABC (AB=BC), en las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos D y E, en $\overline{AC}$ se ubica el punto P, tal que el triángulo DPE es equilátero. Calcular la m∠APD, si m∠EDL+m∠PEC=80, siendo L un punto de la prolongación de $\overline{AD}$.

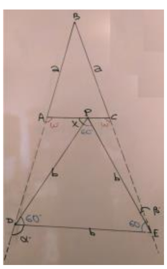
A) 60 B) 20 C) 30
D) 50 E) 40

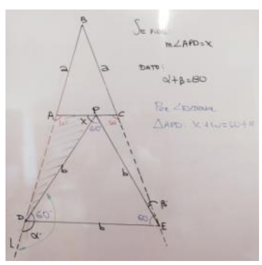
Resolución:

Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.

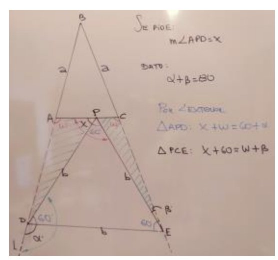


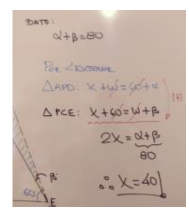
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS





RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS





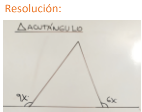
Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. Dos ángulos exteriores de un triángulo acutángulo miden 9x y 6x. Calcular la suma de los valores enteros que puede tomar x.

A) 70 B) 135 C) 77
D) 33 E) 49

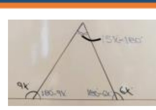
Resolución:



Se pide la suma de los valores enteros que puede tomar x.

$90 < 9x < 180 \rightarrow 10 < x < 20 \ldots (1)$

$90 < 6x < 180 \rightarrow 15 < x < 30 \ldots (2)$



$0 < 15x - 180 < 90$

$180 < 15x \wedge 15x < 270$

$12 < x \wedge x < 18$

$12 < x < 18 \ldots (3)$

Finalmente de (1), (2) y (3):

$15 < x < 18$

Luego $x = 16$ o 17

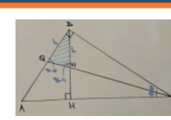
Rpta. D

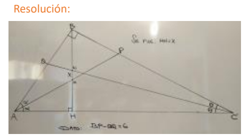
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

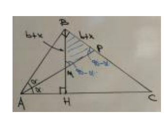
07. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. La bisectriz del ángulo A interseca a $\overline{BH}$ en M y a $\overline{BC}$ en P. La bisectriz del ángulo C interseca a $\overline{BH}$ en N y a $\overline{AB}$ en Q. Calcular MN, si BP-BQ=6.

A) 6 B) 3 C) 4
D) 1,5 E) 2

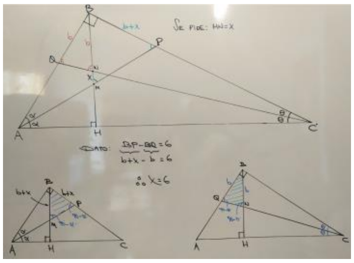
Resolución:







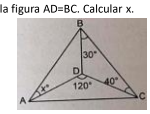
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Rpta. A

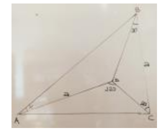
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

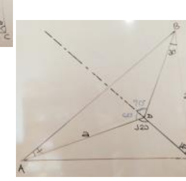
09. En la figura AD=BC. Calcular x.



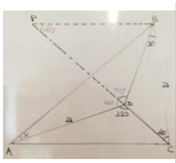
A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 36

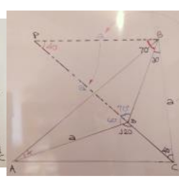
Resolución:

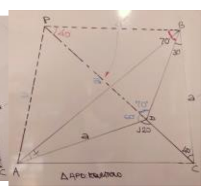




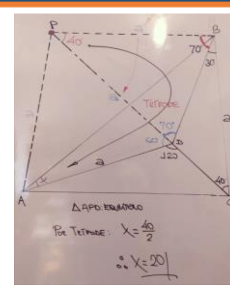
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS







RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



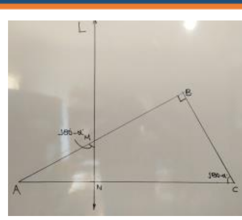
Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

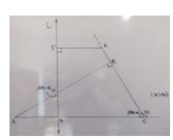
08. Dado un triángulo ABC, recto en B, y una recta L secante a $\overline{AB}$ en M a $\overline{AC}$ en N, tal que: $m\angle ACB = m\angle AMN = 180-\alpha$. En la prolongación de $\overline{CB}$ se ubica el punto D y se traza $\overline{DP} \perp \overleftrightarrow{L}$. Si la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos A y D es α, calcular α.

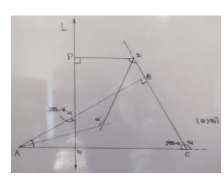
A) 115 B) 112,5 C) 120
D) 135 E) 143

Resolución:

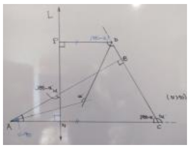


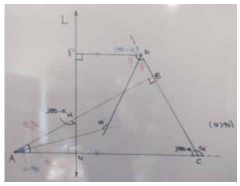
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



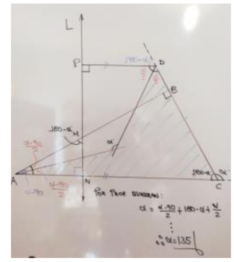


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

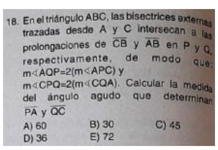




RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

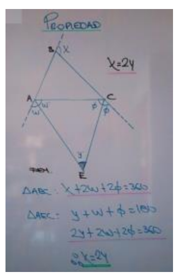


18. En el triángulo ABC, las bisectrices externas trazadas desde A y C intersecan a las prolongaciones de $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ en P y Q, respectivamente, de modo que: $m\measuredangle AQP=2(m\measuredangle APC)$ y $m\measuredangle CPQ=2(m\measuredangle CQA)$. Calcular la medida del ángulo agudo que determinan $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$

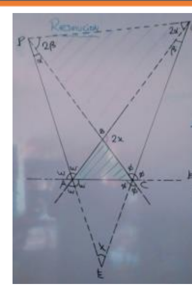
A) 60 B) 30 C) 45

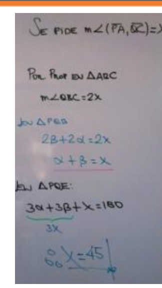
D) 36 E) 72

Resolución:



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS





RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS